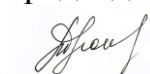


**Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего образования
«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
(Финансовый университет)»
Пермский финансово-экономический колледж -
Пермский филиал Финансового университета**

РЕКОМЕНДОВАНО

на заседании ПЦК ОГСД
Протокол № 11 от 25 июня 2024 г.
Председатель ПЦК, к.п.н.



М.Л. Катаева

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель директора по учебно-
методической работе



Ю.А. Хакимова

«27» июня 2024 г.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
учебной дисциплине ОПБ. 05 МАТЕМАТИКА
по теме «Векторы».**

Специальности 40.02.04 Юриспруденция

Пермь, 2024 г.

Одобрено на заседании Научно-методического совета
протокол № 1(52)от 26 октября 2024 г.

Автор-составитель: Виноградова Н.А., преподаватель Пермского филиала
Финансового университета.

Методические рекомендации учебной дисциплине ОПБ. 05 МАТЕМАТИКА
по теме «Векторы» (базовый уровень) для студентов специальности 40.02.04
Юриспруденция / сост. Н.А. Виноградова. – Пермь: Пермский филиал
ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской
Федерации», 2024. – 25 с.

Содержание

Пояснительная записка	4
1. Основные понятия и определения.....	5
1.1 Понятие вектора	5
1.2. Коллинеарные векторы.....	6
1.3. Равенство векторов	7
2. Линейные операции над векторами	7
2.1. Сложение векторов	8
2.2. Вычитание векторов	10
2.3. Умножение вектора на число.....	11
2.4. Угол между двумя векторами	11
3. Прямоугольная система координат.....	12
3.1. Угол между векторами и осью.....	12
3.2. Проекция вектора на ось	12
3.3. Прямоугольная система координат	13
3.4. Координаты вектора.....	14
3.5. Разложение вектора по координатными осям.....	14
3.6. Правила действия над векторами, заданными своими координатами	15
3.7. Условие коллинеарности двух векторов	15
3.8. Длина вектора. Расстояние между точками на плоскости.....	15
3.10. Деление отрезка в данном отношении	17
Вопросы для самоконтроля.....	18
Примеры решения задач.....	20
Список литературы	25

Пояснительная записка

Методические рекомендации по дисциплине «Математика» по теме «Векторы» предназначены для студентов, обучающихся на базе основного общего образования, по программам подготовки специалистов среднего звена, для специальностей 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям), 38.02.02 Страхование дело (по отраслям), 38.02.06 Финансы, 40.02.01 Право и организация социального обеспечения, 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Метапредметные и предметные результаты освоения учебной дисциплины «Математика» по заданной теме:

- М-1-умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях (М-1);
- М-5-владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств для их достижения.
- П-2 - сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;
- П-3-владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
- П-6-владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

Методические рекомендации содержат основные теоретические аспекты и примеры решения практических упражнений темы «Векторы», что позволяет повторить тему, по которой выполняются задания с применением элементов дистанционных образовательных технологий и электронного обучения. В разработке имеются необходимые чертежи, справочные

сведения. Методические рекомендации составлены в соответствии с Рабочей программой учебной дисциплины ОУД.9.Математика (базовый уровень).

1. Основные понятия и определения

Величины, которые полностью определяются своим численным значением, называются **скалярными**.

Примерами скалярных величин являются: площадь, длина, объём, температура, работа, масса.

Другие величины, например, сила, скорость, ускорение, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие векторы называются **векторными**.

1.1 Понятие вектора

Вектор- это направленный прямолинейный отрезок, т.е. отрезок, имеющий определённую длину и определённое направление.

Вектор, заданный парой (A, B) несовпадающих точек, обозначаемых символом $\overrightarrow{AB}$

Точка A называется **началом**, а точка B – **концом вектора**.

Для обозначения векторов употребляется также строчные латинские буквы со стрелкой наверху:

$$\overrightarrow{a} \quad \overrightarrow{b} \quad \overrightarrow{c} \quad \dots \quad \overrightarrow{x} \quad \overrightarrow{y}$$

Длиной или модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\mathbf{a}|$.

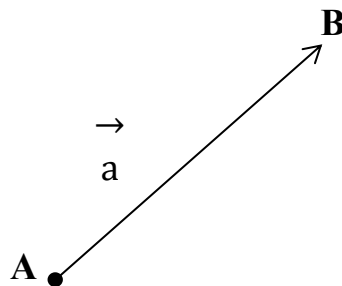
Начало вектора может совпадать с его концом. Такой вектор называется нулевым и обозначается $\overrightarrow{0}$.

Длина нулевого вектора равна нулю. Понятие направления не вводится.

Итак, каждый вектор, отличный от нулевого, имеет три характеристики:

1. Начальную точку.
2. Длину (модуль вектора).

3. Направление.



1.2. Коллинеарные векторы

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

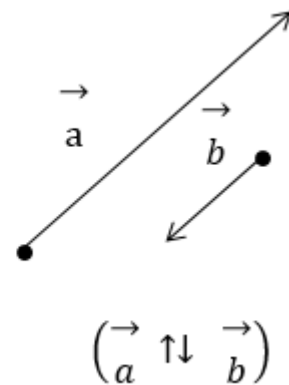
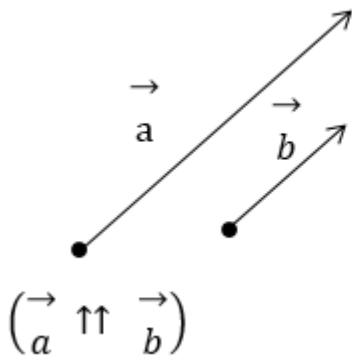
Записываются: $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Коллинеарные вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ могут быть направлены **одинаково** или **противоположно**.

В первом случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **сонаправленными**
 $(\vec{a} \uparrow \vec{b})$

Во-втором,- **противоположно направленными** $(\vec{a} \updownarrow \vec{b})$.



1.3. Равенство векторов

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **равными**

$(\vec{a} = \vec{b})$, если они одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора помещать в любую точку пространства.

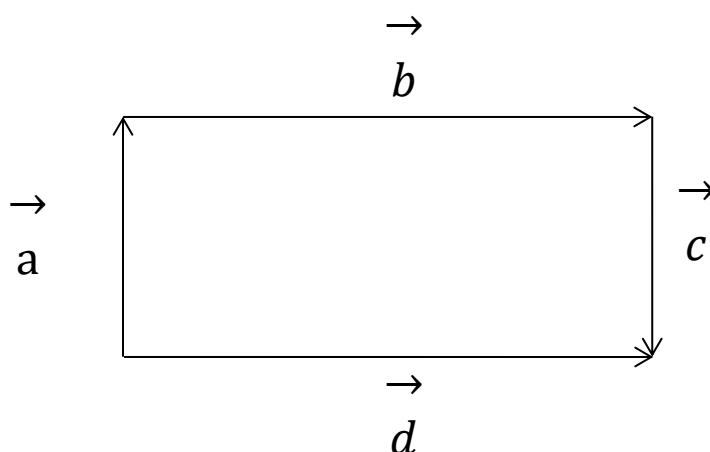


Рис.3

На рис. 3 векторы образуют прямоугольник.

Справедливо равенство

$$\vec{b} = \vec{d}, \text{ но } \vec{a} \neq \vec{c}$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ - противоположны. Они имеют одинаковую длину, но противоположные по направлению

$$(\vec{a} = -\vec{c})$$

2. Линейные операции над векторами

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

2.1. Сложение векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - два произвольных вектора. Возьмём произвольную точку O и построим вектор $\vec{OA} = \vec{a}$. От точки A отложим вектор $\vec{AB} = \vec{b}$.

Вектор $\vec{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

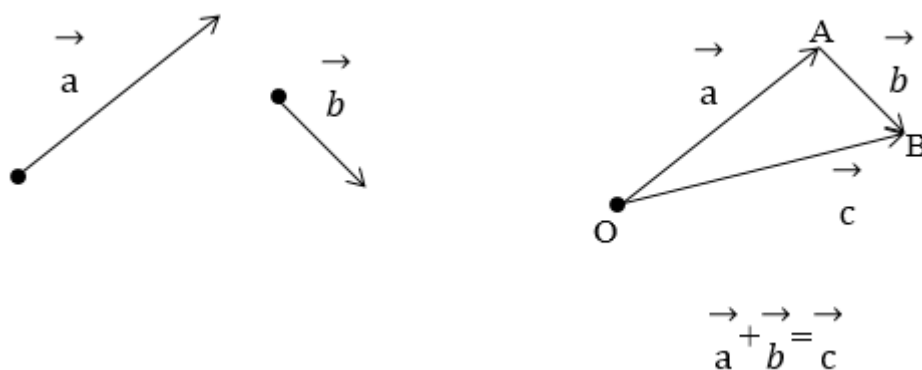


Рис. 4

Это правило сложения векторов называется правилом **треугольника**.

Сумма двух векторов можно построить также по правилу параллелограмма:

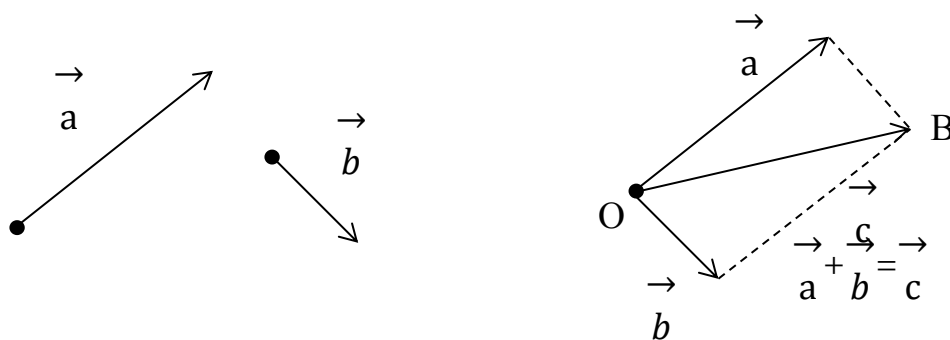


Рис. 5

Если необходимо сложить три и более векторов, то применяется **правило многоугольника**:

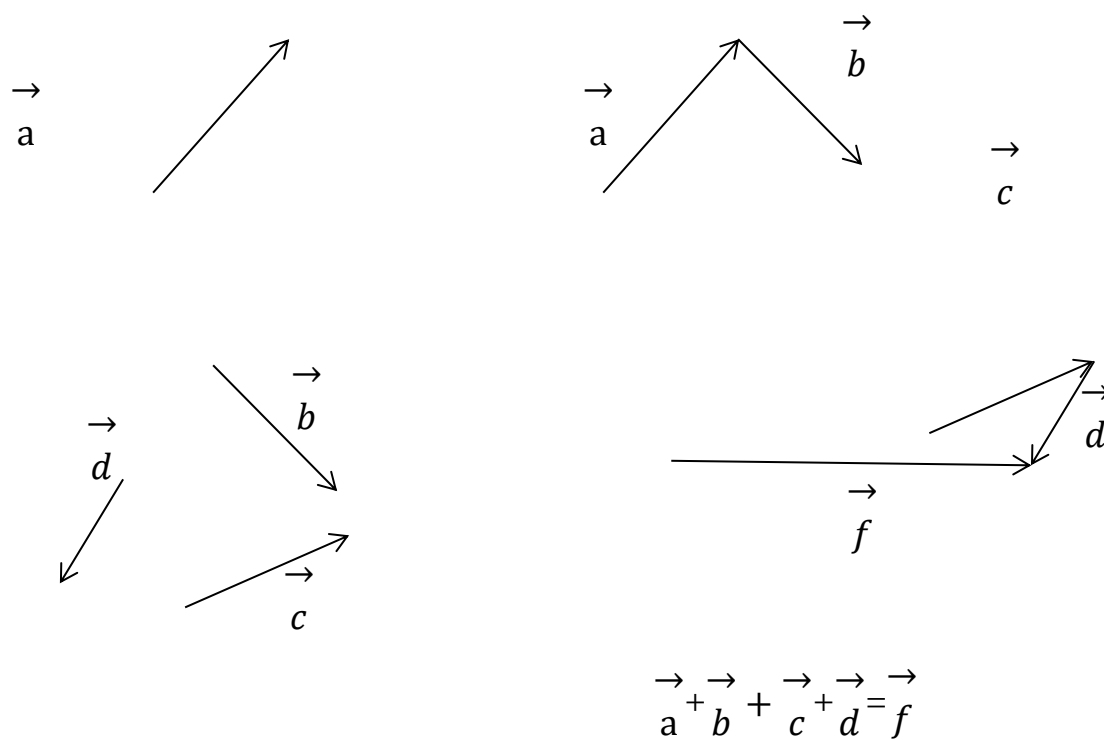


Рис. 6

2.2. Вычитание векторов

Под разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$



Рис.7

Можно вычитать векторы по правилу сложения:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, т.е. вычитание векторов заменить сложением вектора $\vec{a}$ с вектором, противоположным вектору $\vec{b}$.

В параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, другая – разность. $\vec{a} + \vec{b}$

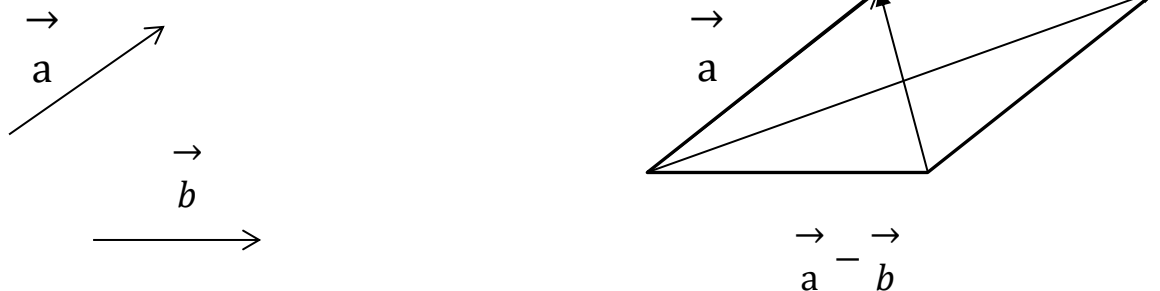


Рис. 8

2.3. Умножение вектора на число

Произведением нулевого вектора $\vec{a}$ на число m называется вектор, имеющий направление вектора $\vec{a}$, если $m > 0$ и противоположное направление, если $m < 0$. Длина этого вектора равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на модуль числа m .

Произведение вектора $\vec{a}$ на число m обозначается $m\vec{a}$. При любых m и $\vec{a}$ векторы $m\vec{a}$ и $\vec{a}$ коллинеарны и $|m\vec{a}| = |m| * |\vec{a}|$.

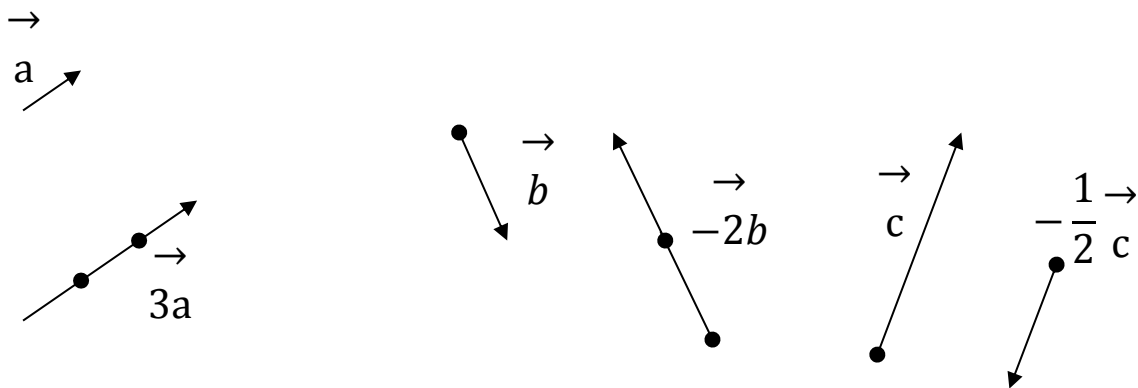


Рис. 9

2.4. Угол между двумя векторами

Угол между двумя нулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между равными им векторами с общим началом.

Обозначается:

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi, \text{ где } 0 \leq \varphi \leq 180^\circ.$$

Частные случаи:

а) Если $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$

б) Если $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

в) Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$

Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 90° , то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **перпендикулярными** или (**ортогональными**).

3. Прямоугольная система координат

3.1. Угол между векторами и осью

Прямая, на которой выбрано положительное направление и задана единица измерения длины, называется **осью**.

Вектор $\vec{e}$, имеющий длину $|\vec{e}| = 1$ и направление, совпадающее с направлением оси, называется **единичным вектором** или **ортом** этой оси.

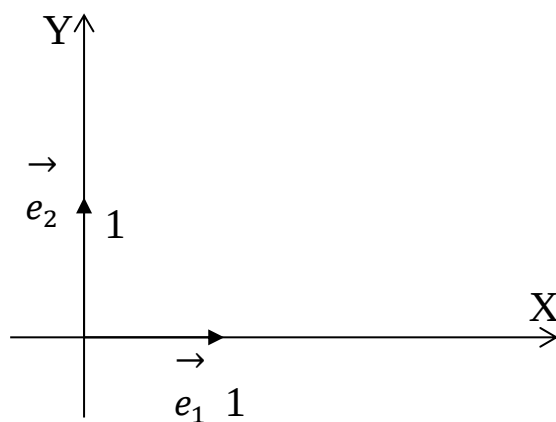


Рис. 10

Угол между нулевым вектором $\vec{a}$ и осью l называется угол между направлениями оси и вектора

$$(\vec{a} \wedge_e) = \alpha, \text{ где } 0 \leq \alpha \leq 180^\circ \text{ (см. рис. 12).}$$

3.2. Проекция вектора на ось

Проекцией на ось называется направленный отрезок на оси, начало которого есть проекция начала вектора, а конец- проекция его конца.

Длина этого направленного отрезка берётся со знаком плюс, если направления отрезка и оси совпадают со знаком минус, если их направления противоположны.

Проекция вектора $\vec{a} \neq 0$ на ось l равна длине этого вектора, умноженной на косинус угла α между осью и вектором.

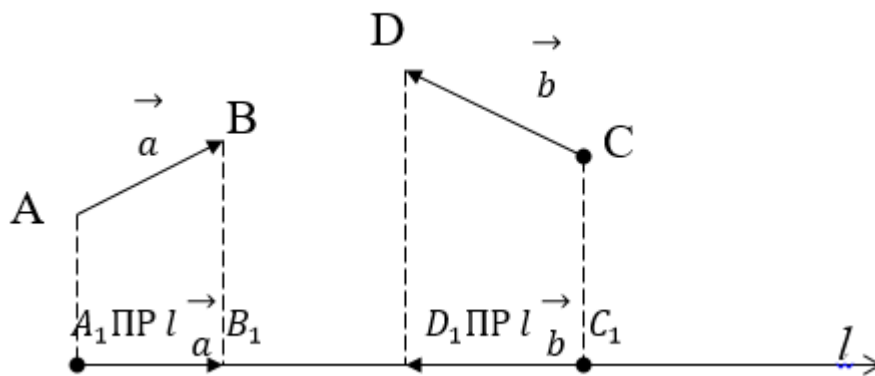


Рис. 11

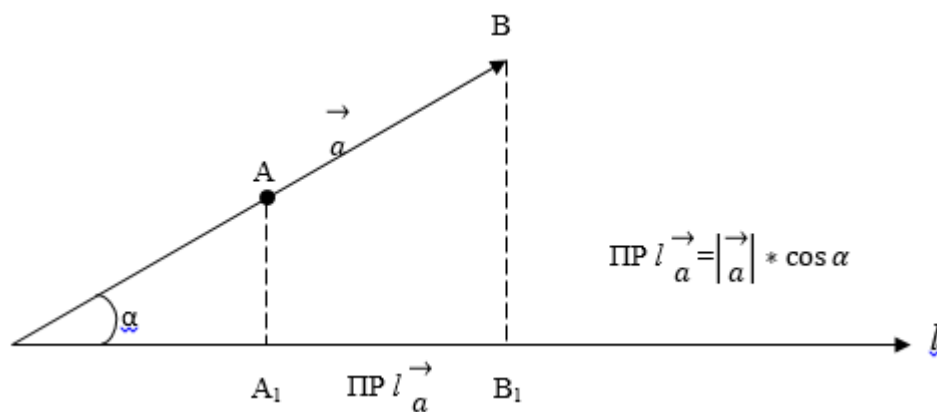


Рис. 12

3.3. Прямоугольная система координат

Пусть на плоскости задана пара единичных взаимно перпендикулярных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$, отложенных от начала координат точки O .

Такую пару векторов называют перпендикулярным базисом на плоскости.

Совокупность начала O и прямоугольного базиса $(\vec{i}, \vec{j})$ называют прямоугольной системой координат на плоскости.

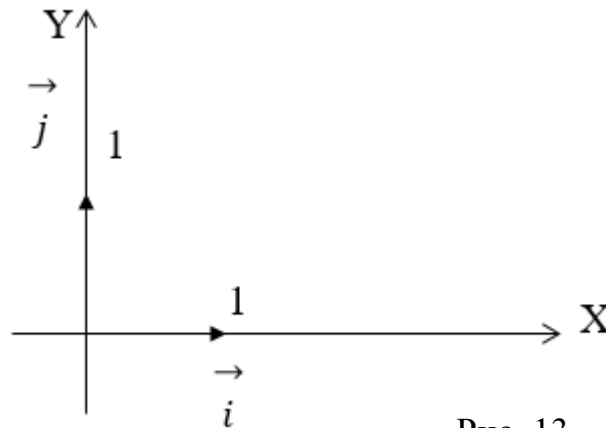


Рис. 13

3.4. Координаты вектора

Если некоторый вектор $\vec{a} \neq 0$ имеет начало в точке $A(x_A, y_A)$, а конец - в точку $B(x_B, y_B)$, то координатами вектора $\vec{a}$ называю числа: $X = x_B - x_A$
 $Y = y_B - y_A$

Координаты вектора записывают так:

$$\vec{a} = \vec{AB} = (X, Y) = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

3.5. Разложение вектора по координатными осям

Любой вектор $\vec{a}$ с координатами (x, y) можно представить в виде:

$$\vec{a} = x * \vec{i} + y * \vec{j}$$

Это выражение называется разложением вектора по осям координат, где $\vec{i}$ - единичный вектор по оси OX

$\vec{j}$ - единичный вектор по оси OY

Если начало вектора $\vec{a}$ находится в точке $A(x_A, y_A)$, а конец в точке $B(x_B, y_B)$, то разложение вектора $\vec{a}$ записывается так:

$$\vec{a} = \vec{AB} = (x_B - x_A) * \vec{i} + (y_B - y_A) * \vec{j}$$

3.6. Правила действия над векторами, заданными своими координатами

Даны вектора:

$$\vec{a} = (X_1; Y_1) \text{ и } \vec{b} = (X_2; Y_2)$$

Координаты суммы двух (и более) векторов равны:

$$\vec{a} + \vec{b} = (X_1 + X_2; Y_1 + Y_2)$$

Координаты разности:

$$\vec{a} - \vec{b} = (X_1 - X_2; Y_1 - Y_2)$$

Координаты произведения векторов на число:

$$m \cdot \vec{a} = (mX_1; mY_1)$$

3.7. Условие коллинеарности двух векторов

1. Если соответствующие координаты двух векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны, т.е. $\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = k$

$$2. \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \vec{b}$$

Если $k > 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – сонаправленные.

Если $k < 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – противоположно направленные.

3.8. Длина вектора. Расстояние между точками на плоскости

Вектор, направленный из начала координат в произвольную точку M плоскости XOY , называется радиус-вектором точку M и обозначается $\vec{r}$.

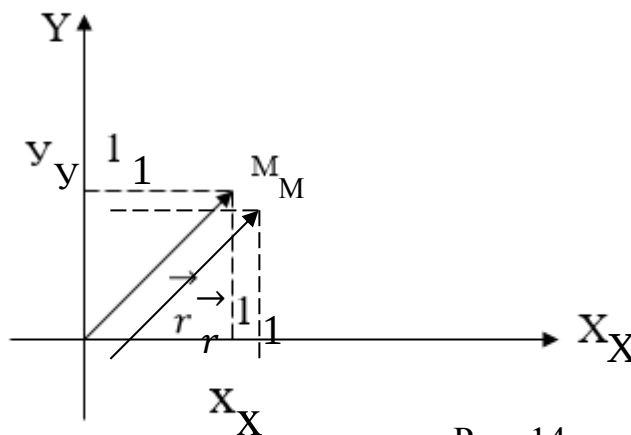


Рис. 14

Его координаты записываются так:

$$\vec{r} = \vec{OM} = (x, y)$$

Длина радиус-вектора $\vec{r}=(x, y)$ находится по формуле:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Длина произвольного вектора с координатами

$\vec{a} = \vec{AB}=(X_B - X_A; Y_B - Y_A)$ находятся по формуле:

$$|\vec{a}| = |\vec{AB}| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

С помощью этой формулы вычисляем также расстояние между двумя точками на плоскости.

3.9. Скалярное произведение двух векторов. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов

Скалярным произведение двух нулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними и обозначается:

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a} ; \vec{b})$$

$$\cos(\angle \vec{a} ; \vec{b}) = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами

$\vec{a}=(X_1; Y_1)$ и $\vec{b}=(X_2; Y_2)$, то

Скалярное произведение этих векторов можно выразить через их координаты по формуле:

$$\vec{a} * \vec{b} = X_1 * X_2 + Y_1 * Y_2 ,$$

а угол между ними находится так:

$$\cos(\angle \vec{a} ; \vec{b}) = \frac{X_1 * X_2 + Y_1 * Y_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2} * \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}}$$

Свойства скалярного произведения

1. Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух нулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является равенство нулю их скалярного произведения

$$(\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0, \vec{a} * \vec{b} = 0) \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

2. Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ называется скалярное произведение

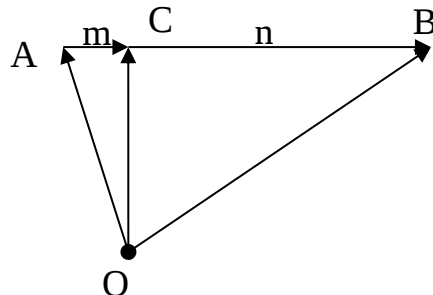
$$\vec{a} * \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

3.10. Деление отрезка в данном отношении

Рассмотрим некоторое свойство векторов, часто используемых при решении геометрических задач.

Очевидно, что $C \in [AB]$ делит отрезок $[AB]$ в данном отношении $\frac{m}{n}$, т.е. $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{m}{n}$, тогда и только тогда, когда $\vec{AC} = \frac{m}{n} \vec{CB}$

(1)



Если A, B и C заданы своими радиус- векторами $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ относительно некоторой точки O, то из (1) следует равенство

$$\vec{OC} - \vec{OA} = \frac{m}{n} (\vec{OB} - \vec{OC}), \text{ из корого находим}$$

$$\vec{OC} = \frac{n}{m+n} * \vec{OA} + \frac{m}{m+n} * \vec{OB} \quad (2)$$

Формула (2) выражает радиус-вектор искомый точки C, делящий отрезок $[\vec{AB}]$ в отношении $\frac{m}{n}$, через радиус- векторы

Заданных точек A и B. В частности, если точка C является серединой отрезка

$$[\vec{AB}], \text{ то } \vec{OC} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB})$$

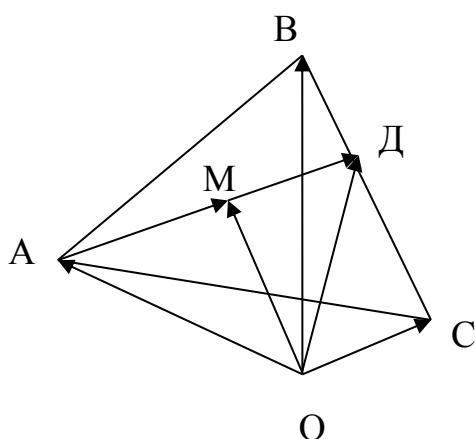
Докажем, что медианы произвольного треугольника ABC пересекаются в одной точке M такой, что:

1) Расстояние от точки M до каждой вершины треугольника равно $\frac{2}{3}$ длины соответствующей медианы.

2) Для любой точки O справедливо соотношение:

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

Пусть точка M пересекает $\frac{2}{3}$ длины отрезка $[AD]$ от точки A



Тогда

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{AD} = \vec{OA} + \frac{2}{3}(\vec{OD} - \vec{OA}) = \\ &= \vec{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) - \vec{OA}\right) = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})\end{aligned}$$

Тот же результат получается для любой другой медианы треугольника ABC .

Это говорит о том, что M – общая точка всех трёх медиан.

Отсюда следует, что, если M – точка пересечения медиан треугольника ABC

и O – произвольная точка пространства, то имеет место:

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

Вопросы для самоконтроля

Подумай и ответь:

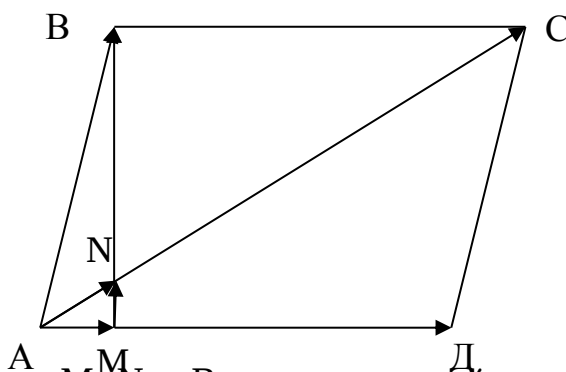
1. Дан вектор $\vec{AB}$, отличный от нуля. Можно ли утверждать, что он равен $\vec{BA}$?
2. Известно, что вектор $\vec{AB}$ равен вектору $\vec{CD}$. Можно ли утверждать, что их модули равны?
3. Известны координатные векторы $\vec{e}_1 = (1; 0)$ и $\vec{e}_2 = (0; 1)$.
Чему равны координатные вектора $3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$?
4. Абсолютная величина вектора $\vec{ma}$ равна 5. Известны координаты вектора $\vec{a} = (-3; 4)$. Чему равна величина m ?
5. Какому условию должны удовлетворять три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, чтобы из них можно было образовать треугольник?
6. В каком случае проекция вектора a на ось l равна нулю; равна абсолютной величине длине данного вектора?
7. Проверить, перпендикулярны ли векторы:
 - а) $\vec{a} = (-3; 2)$ и $\vec{b} = (4; 6)$
 - б) $\vec{c} = \left(\frac{3}{4}; -1,5\right)$ и $\vec{d} = \left(\frac{4}{3}; 5\right)$
 - в) $\vec{m} = (-2; 5)$ и $\vec{n} = (3; 1)$
8. Какой знак имеет скалярное произведение векторов, если угол между ними
а) острый; б) тупой; в) прямой?
9. Применяя понятие вектора доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
10. Что понимают под линейными операциями над векторами?

Примеры решения задач

Задача 1

На стороне АД и диагонали АС параллелограмма ABCD

Взяты точки М и N так, что $|\vec{AM}| = \frac{1}{5} |\vec{AD}|$ и $|\vec{AN}| = \frac{1}{6} |\vec{AC}|$



Доказать, что точки М, N и В лежат на одной прямой. В каком отношении точка N делит отрезок [MB]?

Решение:

Чтобы убедиться в том, что М, N и В лежат на одной прямой, достаточно доказать, что векторы $\vec{MN}$ и $\vec{MB}$ коллинеарны.

По условию имеет

$$\vec{AM} = \frac{1}{5} \vec{AD}, \quad \vec{AN} = \frac{1}{6} \vec{AC}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{MN} &= \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{1}{6} \vec{AC} - \frac{1}{5} \vec{AD} = \frac{1}{6} (\vec{AD} + \vec{DC}) - \frac{1}{5} \vec{AD} = \\ &= \frac{1}{30} (5\vec{DC} - \vec{AD}) \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\vec{MB} = \vec{AB} - \vec{AM} = \vec{AB} - \frac{1}{5} \vec{AD} = \frac{1}{5} (5\vec{AB} - \vec{AD})$$

Так как $\vec{AB} = \vec{DC}$, то из полученных равенств следует, что $\vec{MB} = 6 \vec{MN}$.

Это означает, что точки М, N и В лежат на одной прямой.

Из равенства $\vec{MB} = 6 \vec{MN}$ следует, что $\frac{|NB|}{|MN|} = 5$, т.е. точка N делит отрезок [MB] в отношении 5:1

Задача 2

Дано: A (1;-1); B (-1;0) C(0;1)

$$\vec{AB} = \vec{CD}$$

Найти: D(x,y).

Решение:

1. Если A (1;-1); B (-1;0), то $\vec{AB} = (-1-1; 0-(-1)) = (-2; 1)$

2. Если C(0;1), D(x,y), то $\vec{CD} = (x-0; y-1)$.

3. По условию $\vec{AB} = \vec{CD}$, тогда равны их координаты

$$x-0 = -2 \quad x = -2$$

$\Rightarrow$

$$y-1 = 1 \quad y = 2$$

Таким образом, D(-2; 2).

Ответ: D (-2; 2).

Задача 3

Векторы $\vec{a} = (1; -1)$ и $\vec{b} = (-2; -2; k)$ коллинеарны.

Чему равно k?

Решение:

Т.к. векторы коллинеарны по условию, их соответствующие координаты пропорциональны $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{k}$, k=2.

Ответ: 2.

Задача 4

Даны векторы $\vec{a} = (3; 2)$ и $\vec{b} = (-2; 1)$

Найти: модуль вектора $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Решение:

Для определения модуля вектора необходимо знать его координаты.

Координаты вектора $2\vec{a} = (3*2; 2*2) = (6; 4)$.

Координаты вектора $3\vec{b} = (-2*3; 1*3) = (-6; 3)$.

Координаты вектора $2\vec{a} + 3\vec{b} = (6+(-6); 4+3) = (0; 7)$

Модуль искомого вектора:

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 7^2} = 7.$$

Ответ: 7.

Задача 5

Выразить через единичные векторы $\vec{i} + \vec{j}$ следующие векторы:

а) $\vec{a} = (-2; 4)$

б) $\vec{a} = \vec{AB}$, если $A(-2; -1)$;

Решение:

а) $\vec{a} = (-2; 4)$ $x = -2$ $y = 4$.

По формуле $\vec{a} = x * \vec{i} + y * \vec{j}$ получим

$$\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j}.$$

б) $\vec{a} = \vec{AB}$, $A(-2; -1)$; $B(4; -3)$

$$\vec{a} = \vec{AB} = (4 - (-2); -3 - (-1)) = (6; -2)$$

$$\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j}.$$

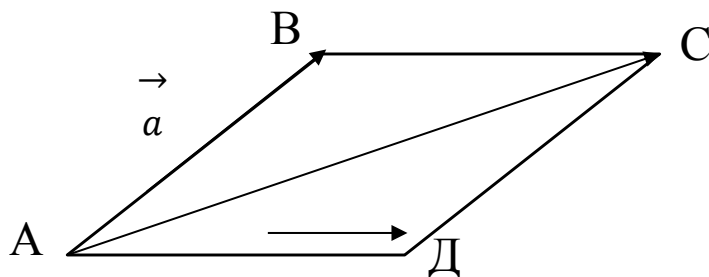
Ответ: а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$, б) $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$.

Задача 6

ABCD- ромб, $|AB| = 1$, $\angle BAD = 30^\circ$.

Найти длину диагонали ромба $|AC|$.

Дано: ABCD- ромб $|AB|=|a| = 1$; $\angle BAD = 30^\circ$.



Найти: $|AC|$.

Решение:

1. $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ по построению, тогда $AC^2 = (\vec{AB} + \vec{AD})^2 = \vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AD}^2 \Rightarrow |\vec{AC}|^2 = |\vec{AB}|^2 + 2|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cdot \cos \angle BAD + |\vec{AD}|^2$
2. $|AB| = |AD| = 1$ $\angle BAD = 30^\circ$ по условию.

$$|\vec{AC}|^2 = 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ + 1 = 2 + \sqrt{3}.$$

$$|AC| = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

Ответ: $|AC| = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

Реши самостоятельно

- 1) В треугольнике ABC известны $\vec{AB} = a$ и $\vec{AC} = b$.

Построить

$$\text{а) } \vec{c} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} \quad \text{б) } \vec{d} = \frac{\vec{b} + \vec{a}}{2} \quad \text{в) } \vec{k} = -\frac{\vec{b} + \vec{a}}{2}.$$

- 2) Найти угол α между векторами

$$\vec{a} = (1; \sqrt{3}) \text{ и } \vec{b} = (-0,5; 0,5\sqrt{3}).$$

- 3) Даны векторы $\vec{a} = (1; 0)$ и $\vec{b} = (1; 1)$.

Найти такое число m , чтобы вектор $\vec{a} + m\vec{b}$ был перпендикулярным вектору $\vec{a}$.

- 4) Проверить, коллинеарны ли векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$. Если да, то сонаправлены ли они?

Векторы соответственно заданы точками:

а) $A(2;1)$ $B(-4; 4)$ $C(-1;1)$ $D(7; -5)$

б) $A(2;1)$ $B(6; 5)$ $C(3;-1)$ $D(7; -2)$

в) $A(1;1)$ $B(7; 3)$ $C(-4;-5)$ $D(5; -2)$

- 5) Найти длину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}.$$

6) Даны точки: $A(-2; -3)$ $B(2; 4)$ $C(5; 1)$

Разложить векторы $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ и $\vec{CA}$ по единичным векторам $\vec{i} + \vec{j}$.

- 7) При каких значениях x векторы $(x-1)\vec{a}$ и $2x\vec{a}$ сонаправлены, если $\vec{a} \neq 0$?

- 8) При каких значениях m векторы $(m^2-m-2)\vec{b}$ и $m^3\vec{b}$ противоположно направлены, если $\vec{b} \neq 0$?

- 9) В ромбе $ABCD$ длина стороны равна 6, а величина угла BAD равна $\frac{\pi}{3}$. На стороне BC взята точка E такая, что $EC = 2$. Найти расстояние от E до центра симметрии ромба.

- 10) В треугольнике ABC дано: $\vec{AB} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ и $\vec{AC} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$,

где $\vec{i} + \vec{j}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Доказать, что треугольник ABC – прямоугольный и вычислить его площадь.

Список литературы

1. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. и другие. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов средней школы. М. Просвещение, 2020 г
2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. и другие. Геометрия. Учебник для 10-11 классов средней школы. М. Просвещение, 2021 г.
3. Геометрия: учеб, пособие для СПО/ Н. В. Богомоллов. — М.: Издательство Юрайт, 2022. — 92 с. — Серия : Профессиональное образование.
4. Богомоллов Н.В. Сборник задач по математике: учебное пособие для ССУЗов. М. Дрофа, 2019 г.